

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**"ADOLF HAIMOVICI"**  
**ETAPA JUDEȚEANĂ - 1 martie 2008**

**Filiera tehnologică : profil tehnic**

**CLASA A XII A**

I. Se consideră următoarele permutări de ordin 4:  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

- a) Să se găsească  $x \in S_4$  dacă  $\sigma \cdot x = \tau$ .
- b) Să se găsească  $\sigma^{2008}$ .
- c) Să se arate că ecuația  $x^2 = \sigma$  nu are soluții în mulțimea permutărilor de ordin 4.

II. Fie mulțimea  $G = \{A \in M_2(\mathbb{Z}_2) \mid A \cdot A^t = I_2\}$ , unde  $A^t$  reprezintă transpusa matricei  $A$ ,

iar  $I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$ .

- a) Să se arate că  $I_2$  aparține mulțimii  $G$ .
- b) Câte elemente are mulțimea  $M_2(\mathbb{Z}_2)$ ?
- c) Să se arate că  $(G, \cdot)$  este grup.

III. Fie  $f: (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \{x\}(1 - \{x\})$  (unde  $\{x\} = x - [x]$ , reprezintă partea fracționară a numărului real  $x$ ).

- a) Să se calculeze  $f(1)$ .
- b) Să se demonstreze că funcția  $f$  este continuă în punctul  $x_0 = 1$ .
- c) Să se determine o primitivă a funcției  $f$  pe intervalul  $(0, 2)$ .

IV. Se consideră următoarele integrale:

$$I = \int \frac{\sin x}{2 \sin x + 3 \cos x} dx, \text{ iar } J = \int \frac{\cos x}{2 \sin x + 3 \cos x} dx, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

- a) Să se calculeze  $(2 \sin x + 3 \cos x)'$ .
- b) Să se demonstreze că  $2I + 3J = x + k$ , oricare ar fi  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .
- c) Să se calculeze integralele  $I, J$ .

**Nota:** Timp de lucru 3 ore

Toate subiectele sunt obligatorii

Fiecare subiect este notat de la 0 la 7